Spreads de crédit et taux d'intérêt

Jean Claude GABILLON

Université Toulouse III - Toulouse Business School

jc.gabillon@free.fr

Groupe de Finance

20 Bd Lascrosses

31068 Toulouse Cedex 7

BP 7010

21 Septembre 2006 (1ère version Janvier 2003)

Abstract

Empiriquement, un rétrécissement des spreads de crédit semble, généralement, accompagner une hausse des taux d'intérêt. Les modèles structurels standards d'évaluation de la dette risquée paraissent expliquer assez bien cette relation. La raison apparente de ce résultat réside dans l'augmentation du drift du processus risque neutre qu'occasionne une hausse du taux d'intérêt. Elle a pour effet de réduire la probabilité risque neutre de défaut. Mais nous montrons, à l'aide d'une approche par les cash Flows, qu'une hausse du taux d'intérêt, laisse, en réalité, inchangé, le drift du processus risque neutre dans les modèles structurels standard à un facteur. Par ailleurs, elle abaisse la valeur instantanée de la firme. Au final la probabilité risque neutre de défaut est en fait augmentée. Les modèles standards ne peuvent donc directement justifier une relation inverse taux-spreads de crédit . Nous présentons un modèle à deux facteurs, cash-flow orienté, afin d'analyser le problème en présence du double risque d'exploitation et de taux. Les conclusions sont similaires. Le modèle dégage, notamment, l'incidence des fluctuations du taux d'intérêt sur le drift et sur la volatilité de la valeur de l'entreprise. Nous précisons le concept de sensibilité stochastique dans ce contexte de dette riquée.[1].

Abstract

In standard risky debt models the credit spreads are, apparently, inversely related to the level of the interest rates. An

[1]Différentes discussions ont permis d'améliorer les versions premières de ce papier. Je voudrais remercier, en particulier, Jean Charles Rochet, Jean Paul Descamp, Stéphane Villeneuve, L Germain et deux arbitres anonymes. Des erreurs ou des faiblesses subsistent certainement. Elles ne sont imputables qu'à l'auteur

increase in r tends to reduce the probability of a default because of the effect on the upward drift of the risk-neutral process for the firm value V. We show, with a cash flow approach in a one factor model and in a two factors model, that this analysis is incomplete and that, in structural models, credit spreads widen as interest rate increase, at the opposite of the empirical evidence.

Introduction

La plupart des modèles structurels de la dette risquée semblent produire une liaison inverse entre les spreads de crédit et le taux d'intérêt. Toute hausse du taux instantané[2], s'y traduit par une baisse compensatoire du spread qui amortit l'effet, sur le prix de la dette risquée, de la variation du taux. La sensibilité ou la duration de la dette risquée se trouve donc réduite voire inversée par rapport à celle d'une dette exempte de risque de défaut et comportant les mêmes flux promis. Selon Longstaff et Schwartz (95) " *La duration d'un bon risqué à taux fixe est plus courte que celle de son homologue sans risque de contrepartie*" et, plus loin, ils ajoutent que "*la duration d'une dette très risquée peut même devenir négative*", autrement dit, le prix d'une dette frappée d'une forte probabilité de défaut pourrait devenir une fonction croissante du taux d'intérêt. Longstaff et Schwartz fournissent une explication à ce raccourcissement de la duration dû à la présence du risque de défaut. Un "*accroissement du taux d'intérêt tend à réduire la probabilité de défaut en raison de son effet sur le drift du processus risque-neutre de V. Ainsi un accroissement de r entraîne une diminution du spread de crédit*". Cette idée est souvent reprise dans la littérature[3]. Mais Longstaff et Schwartz se contentent de donner une "explication mathématique" au phénomène de raccourcissement de la duration et, non point, une justification

[2] L'effet de la hausse du taux d'intérêt est généralement mesuré en « statique comparative» soit dans un modèle unifactoriel où le taux est exogène et censé être constant, soit dans un modèle à deux facteurs, où le taux suit un certain processus stochastique, mais dont on fait varier le niveau initial. L'introduction d'un taux stochastique ouvre cependant la voie au concept de duration stochastique qui sera dégagé dans la section 3.

[3] Cont Rama (2004), par exemple, note "*Le spread de crédit et le niveau des taux d'intérêt sont négativement corrélés. Ce phénomène s'explique dans la mesure où une hausse des taux d'intérêt entraîne une augmentation de la dérive du processus de la variable V (valeur de la firme), ce qui diminue la probabilité de défaut de la firme*".

économique. Le phénomène est du reste quasi contre intuitif, car la probabilité réelle de défaut n'est pas réduite par la hausse du taux d'intérêt (ce qui est évident si on considère que le drift du processus objectif de la valeur de la firme demeure inchangé). Le résultat obtenu est largement un artefact.

Dans un modèle à un facteur où la valeur de l'entreprise est la variable d'état qui suit un certain processus stochastique de drift $\mu(.) - \delta$, l'introduction d'une hausse du taux d'intérêt instantané r, toutes choses maintenues égales par ailleurs[4], revient à réduire subrepticement la prime de risque d'exploitation $\lambda(.) = \frac{\mu(.)-r}{\sigma(.)}$ à due concurrence. La correction du taux instantané $\mu(.)$ par $\lambda(.).\sigma(.)$, lors du changement de mesure de probabilité, est ainsi moins importante, de sorte que la probabilité risque neutre de défaut est abaissée sans modification de la probabilité effective de défaut (L'écart entre les deux probabilités est diminué). Il en ressort que ce n'est nullement le "modèle" d'évaluation de la dette qui produit le raccourcissement de la duration, mais fondamentalement, une hypothèse arbitraire, dissimulée, exogène au modèle lui même, de comportement de la prime de risque d'exploitation en fonction des variations du taux d'intérêt. S'il est posé que la prime de risque d'exploitation $\lambda(.) = \frac{\mu(.)-r}{\sigma(.)}$ décroît à la suite d'une augmentation du taux d'intérêt, il n'est pas étonnant d'obtenir une baisse des spreads de crédit. Or, dans un premier temps il serait peut être plus naturel et plus intéressant d'apprécier la sensibilité au taux de la dette risquée, en supposant que la prime de risque d'exploitation sous jacente est maintenue constante[5]. Les auteurs retiennent, le plus souvent, cette

[4] Et notamment la valeur courante de l'entreprise et donc les taux μ et δ.

[5] Ce qui devrait s'imposer en bonne logique de statique comparative

hypothèse de prime de risque constante. Mais il se trouve que cette hypothèse est, en réalité transgressée lorsque sont étudiées les propriétés de statique comparative du modèle. Ce comportement de la prime de risque d'exploitation est, du reste, encore plus paradoxal dans un modèle à deux facteurs Valeur de l'entreprise-taux d'intérêt. Dans ce cas, en effet la hausse stochastique du taux d'intérêt, implicitement, réduit la prime de risque d'exploitation sans modifier la prime de risque de taux. Il n'y a aucune justification théorique à ce traitement asymétrique des deux primes de risque. Dans le modèle de Longstaff & Schwartz (95) la prime de risque de taux est explicitement supposée constante tandis que la prime de risque d'exploitation varie implicitement à l'inverse des fluctuations stochastiques du taux d'intérêt. Les mesures de sensibilité au taux de la dette risquée ainsi obtenues reposant donc sur une hypothèse très particulière, nous nous proposons de les réexaminer dans le cadre des principaux modèles structurels remaniés afin d'éviter la forme arbitraire donnée implicitement à la prime de risque d'exploitation[6].

Au premier abord, toutefois, la critique pourrait sembler sans portée dans la mesure où, dans le taux instantané de croissance $\mu(.) - \delta$, le premier terme $\mu(.)$, représentant l'espérance de rentabilité instantanée du portefeuille de titres faisant contrepartie à la valeur V, n'intervient pas dans le pricing des titres contingents émis par la firme. Il n'y aurait apparemment nul dommage à supposer qu'une variation du taux d'intérêt fait varier $\mu(.)$ parallèlement de sorte que la

[6]Le problème n'est du reste pas limité aux modèles de pricing de la dette risquée. La mesure de la sensibilité au taux d'intérêt d'un call par la formule de Black Scholes est exposée à la même critique. Néanmoins la question est plus essentielle pour un produit de longue maturité fortement exposé au risque de taux.

variation du drift risque neutre $r-\delta$ reflète la variation du drift du processus objectif $\mu(.)-\delta$. Mais il y aurait dans cette hâtive conclusion deux hypothèses implicites qui apparaîtront infondées: (i) La hausse de $\mu(.)$ reste sans effet sur la valeur courante de l'entreprise. (ii) La hausse de $\mu(.)$ se traduit tout entière dans une élévation du taux objectif $\mu(.)-\delta$ ou du taux risque neutre $r_t-\delta$ du processus de V et non dans une hausse du taux instantané δ de distribution de cash flow susceptible, à la limite, de laisser les drifts de V inchangés.

Intuitivement il apparaît clairement, que choisir le cash flow d'exploitation comme variable d'état, au lieu de partir de la valeur de l'entreprise doit permettre d'établir le lien entre la valeur de l'entreprise et les cash flows qu'elle libère. Le comportement du paramètre $\delta()$ en fonction du taux r en serait déduit. Si nous considérons que le processus exogène de base est celui du cash-flow d'exploitation, une hausse du taux d'intérêt associée à une prime d'exploitation constante se traduira par une baisse instantanée de la valeur de l'entreprise[7] $V_0=\int\limits_0^\infty \hat{E}_0 X_t e^{-\int_0^t r_s ds}dt=\int\limits_0^\infty E_0 X_t e^{-\int_0^t \mu_s ds}dt$. Dans ce cadre, la valeur courante de l'entreprise n'est plus une donnée exogène mais un résultat endogène, fonction décroissante du taux d'intérêt instantané. La baisse de la valeur de l'entreprise augmente mécaniquement le taux de paiement de cash flow instantané $\delta(.)$. La "valeur de l'entreprise", sous la probabilité risque neutre, n'a donc pas automatiquement son drift $r_t-\delta(.)$ augmenté à la suite d'une hausse

[7] X_t représente le cash-flow d'exploitation instantané de la date t. $E_0()$ est l'espérance sous la probabilité objective $\mathbb{P}$ définie sur $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}\right)$ *espace de probabilité filtré.* $\widehat{E}()$ représente l'espérance sous la mesure de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$. Il faudrait une corrélation fortement positive entre le cash flow et le taux d'intérêt pour que la propriété énoncée puisse ne pas être vérifiée.

du taux d'intérêt, mais voit, en même temps, son niveau initial abaissé, de sorte que l'effet final n'est pas la baisse de la probabilité de défaut. Les modèles structurels s'appuyant directement sur le processus stochastique de la valeur sont, d'un certain point de vue, sous une forme réduite, en ce sens que la valeur de l'entreprise elle même est déterminée par les cash-flow et le taux d'intérêt. Partir directement du processus exogène de la valeur et du taux d'intérêt dissimule le lien valeur- taux d'intérêt. Nous nous proposons donc de réexaminer les mesures du risque de taux de la dette risquée dans le cadre des principaux modèles structurels reformulés. Cette démarche nous conduit, notamment, à développer un modèle à deux facteurs Cash-Flow orienté. Il nous permet de mieux apprécier l'incidence d'une fluctuation aléatoire du taux d'intérêt sur le niveau, sur le drift et sur la volatilité de la valeur de l'entreprise et ainsi sur le spread de défaut. Si, dans ce modèle, le taux d'intérêt r_t suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le drift de V a trois composantes, le taux de croissance espéré du cash flow, une composante marquant une tendance au retour à la moyenne et une composante de convexité. L'aléa qui affecte V est double, il additionne l'aléa d'exploitation et l'aléa du taux d'intérêt. Une variation aléatoire positive du taux réduit la valeur de l'entreprise. Les drifts objectif et corrigé du risque sont certes augmentés mais cette variation est atténuée par la hausse du taux de distribution δ. Au final, les probabilité de défaut, objective et risque neutre, sont accrues et non réduites.

A la suite de Duffie & Singleton (1998), les modèles d'évaluation de la dette risquée, qui sont en même temps des modèles explicatifs du niveau et de la structure des "spreads de crédit", sont généralement rangés en deux catégories. Les "modèles structurels" dont la variable d'état qui suit un certain processus de diffusion est, le plus souvent, la valeur de l'entreprise. Le défaut est un processus endogène qui survient soit, lorsque la valeur de l'entreprise est inférieure à un certain seuil K_T à une date T, échéance de la dette zéro coupon considérée (Merton 74), soit lorsqu'elle heurte un tel seuil à toute date (Black & Cox (1976), Longstaff & Schwartz (1995)), autrement dit atteint une barrière absorbante. Les modèles structurels ont été étendus dans diverses directions:

- Par l' introduction d' un deuxième processus stochastique commandant l'évolution du taux d'intérêt par exemple (Longstaff & Schwartz (95), Collin-Dufresne & Goldstein (2001)).
- Par l'introduction d'une dynamique d'endettement exogène (Tauren (1999), Collin-Dufresne & Goldstein (2001), Hsu & Saà-Requejo & Santa-Clara (2004))
- Par l'endogénéisation du seuil de défaut[8] et de la politique financière suivie par la firme dans un cadre statique[9] avec Leland (1994), Hilberink & Rogers (2002), ou dynamique[10] avec Goldstein & Ju & Leland (2001) et Gabillon & Germain (2006).
- Par l'introduction de sauts[11] qui tend à rapprocher ces modèles des modèles

[8] Dans le modèle de Merton le seuil K correspond au montant dû à l'échéance sur une dette Zéro-coupon. Le plus souvent K est un simple seuil, dépendant étroitement de l'endettement de la firme sans que ce lien soit pour autant explicité. Les modèles à la Leland tentent d'identifier cette liaison: Voir Gabillon Germain (2006)

[9] La firme définit une fois pour toutes son endettement optimal en arbitrant entre économies fiscales et coûts de défaut.

[10] L'optimalité de la politique financière est rendue intertemporellement cohérente.

[11] Les modèles structurels à saut enrichissent la gammes des formes des courbes de spread

d'intensité (Zhou (2001), Hilberink & Rogers (2002), Chen & Kou (2005), Le Courtois & Quittard-Pinon (2006) et Gabillon & Germain (2006)). Duffie & Lando (2001) et Jarrow & Potter (2004), notamment, montrent que le recours à de tels processus trouve un fondement théorique dans les asymétries d'information.

La deuxième famille de modèles est rangée par Duffie & Singleton (1998) sous l'appellation de "modèles sous forme réduite". Dans cette approche le temps du défaut est défini de manière exogène comme dans Jarrow Turnbull (1995) Jarrow & Lando & Turnbull (1997) et Duffie & Singleton (1998). L'avantage de ces modèles est qu'ils pourront être calés sur une certaine structure des spreads en permettant un pricing des titres dérivés de crédit compatible avec les prix observés de la dette risquée. Cependant ces modèles rompent le lien théorique entre les variables économiques de base (valeur de l'entreprise, taux) et l'événement défaut[12]. Or la dette risquée apparaît exposée à deux sortes de risques[13]: Le risque d'exploitation[14] affectant la valeur de l'entreprise (ou ses cash Flow d'exploitation) et le risque de taux[15]. Les modèles sous forme réduite ne fournissent aucune formule *a priori* du risque de taux de la dette risquée con-

et permettent d'obtenir un spread zéro coupon significativement positif, même avec une très faible maturité, ce qui est conforme aux observations (Un processus prévisible fait, au contraire, converger la courbe des spreads vers zéro avec le raccourcissement de la maturité).

[12] Sans s'interdire de mesurer un lien économétrique.

[13] Nous négligeons ici le problème de la liquidité.

[14] Dans un modèle ou le risque d'exploitation qui affecte la valeur de l'entreprise est le seul facteur de risque, le risque de défaut n'est qu'un sous produit de ce risque d'exploitation sous jacent. Dans un modèle à deux facteurs où le taux d'intérêt est stochastique, la probabilité de défaut, dépend du niveau du taux d'intérêt. Mais ce point sera précisé par la suite.

[15] Même dans les modèles, comme Merton (1974), où le taux d'intérêt est supposé constant, le prix de la dette risquée apparaît fonction du taux d'intérêt. En statique comparative il devient possible de mesurer la sensibilité de la dette risquée et de la comparer à la sensibilité d'une dette non risquée ayant la même chronique de coupons nominaux

trairement aux modèles structurels. L'intensité de défaut et son comportement y sont exogènes. La sensibilité des spreads de défaut résulte directement de l'hypothèse initiale spécifiant la liaison fonctionnelle entre l'intensité de défaut et le taux d'intérêt. En raison de l'objet de cet article on en restera donc aux modèles structurels.

Dans une première section nous chercherons à expliciter au préalable les caractéristiques du processus de croissance de la firme Dans une deuxième section nous aborderons la réinterprétation des modèles structurels unifactoriels du type Merton, avec taux d'intérêt déterministe. Dans une troisième section, nous examinerons notre problème dans le cadre, plus riche, des modèles bifactoriels de type Longstaff & Schwartz, avec taux d'intérêt stochastique. Nous y introduirons un concept de sensibilité stochastique applicable à une dette risquée émise par une firme. Dans une dernière section nous serons amenés à développer un modèle à deux facteurs Cash-flow orienté. Notre contribution nous paraît se situer à trois niveaux:

La réinterprétation des modèles structurels standards

L'extension du concept de sensibilité stochastique à une dette risquée

La formulation d'un modèle à deux facteurs cash flow orienté.

1 Le cadre de Modigliani Miller et l'évolution de la valeur de la firme

Dans le cadre de Modigliani Miller, le plus souvent retenu, en l'absence d'impôt et de coûts de faillite, le volet exploitation de l'activité de la firme est rendu indépendant de la politique financière de l'entreprise.

1.1 Le cash Flow issu de l'exploitation et sa croissance.

Soit X le cash flow libre d'exploitation de la firme. Il s'agit du flux de liquidité délivré par l'exploitation de la firme après financement des investissements (de VAN positive). Nous supposons donc que la politique d'investissement de la firme est conditionnellement (aux différents états de la nature) déterminée et n'est pas influencée par les choix de financement de l'entreprise. L'évolution du flux net de liquidité libéré par l'exploitation qui résulte de cette stratégie d'investissement sera également supposée indépendante du niveau des taux d'intérêt. Supposons que X suive un processus brownien géométrique

$$dX_t = g.X_t.dt + \widetilde{\sigma}.X_t.dW_t \tag{1}$$

"g" représente le taux de croissance espéré de la firme. Le cash-flow libre d'exploitation X, en effet, évolue en fonction de la croissance de l'activité de la firme, de ses performances d'exploitation et de ses opportunités d'investissement. Le taux de croissance g est une caractéristique déterminée par l'exploitation de l'entreprise (l'évolution de ses marchés et de ses coûts d'exploitation). Ce n'est pas une variable financière. L'équation (1) définit un modèle de croissance de la firme qui doit être rangé dans la classe des modèles de croissance régulière de la firme. $\widetilde{\sigma}$ mesure la volatiité constante du cash-flow. Si nous admettons que le cash flow X est indépendant du taux d'intérêt, le risque unique qui affecte le cash flow libre peut être qualifié de risque d'exploitation. Soit "λ", la prime par unité de risque associée. On supposera cette prime constante dans le temps. Dès lors, sous la mesure de probabilité martingale neutre au risque $\mathbb{Q}$, le processus de X devient:

$$dX_t = \hat{g}.X_t.dt + \widetilde{\sigma}.X_t.d\hat{W}_t \tag{2}$$

où $\hat{g}$ est le taux de croissance corrigé du risque :

$$\hat{g} = g - \lambda\widetilde{\sigma} \tag{3}$$

Il est important de remarquer que le taux de croissance corrigé du risque $\hat{g}$ ne dépend pas du taux d'intérêt r (du moins tant que la prime de risque d'exploitation est supposée ne pas en dépendre), et, en particulier, n'a aucune raison de lui être égal.

On posera

$$\mu_t = E_t\left(\frac{dV_t}{V_t}\right)/dt + \delta_t \tag{4}$$

Dans le cadre de Modigliani Miller, "μ" représente l'espérance de rentabilité d'un portefeuille réunissant l'ensemble des titres émis par l'entreprise dont la valeur totale, à une date t, correspond à la valeur V_t de l'entreprise. Mais ce gain se partage en un gain en revenu et en une plus value. Le drift de V, lui même, ne recouvre que la plus value attendue.

1.2 La valeur de l'entreprise et sa croissance

D'une manière générale la valeur de la firme est égale à la somme des espérances, sous la mesure de probabilité neutre au risque, des valeurs actualisées des cash Flows futurs. Le coefficient d'actualisation résultant de la somme des taux d'intérêt instantanés sans risque :

$$V_0 = \int_0^{\infty} \hat{E}_0 \left[X_t.Exp\left(- \int_0^t r_s ds \right) \right] dt \tag{5}$$

Si le cash-flow X_t et le taux r_t sont indépendants l'équation (5) se simplifie:

$$V_0 = \int_0^{\infty} \hat{E}_0 \left[Exp\left(- \int_0^t r_s ds \right) \right] .\hat{E}_0 \left(X_t \right).dt. = \int_0^{\infty} B(0,t).\hat{E}_0 \left(X_t \right).dt \tag{6}$$

Dans cette expression, $B(0,t)$ représente le prix courant d'un bon zéro coupon non risqué. Les cash Flows espérés, sous la mesure de probabilité neutre au risque, sont actualisés à l'aide des taux zéro-coupon correspondant à la maturité du cash flow.

Si, enfin, on se place dans le cadre d'un modèle à un seul facteur dans lequel le taux d'intérêt sans risque est constant, et si le cash flow suit un processus (1) caractérisant une croissance régulière, l'équation (6) se simplifie et devient compte tenu de (3) et (4) (formule vraie à toute date, l'indice de la date courante est donc omis) :

$$V = \frac{X}{r - \hat{g}} = \frac{X}{\mu - g} = \frac{X}{\delta} \tag{7}$$

Sachant que, dans un modèle à un facteur:

$$\mu = r + \lambda\sigma$$

avec la volatilité de la valeur de la firme:

$$\sigma = \widetilde{\sigma} \tag{8}$$

et en notant :

$$\delta = \mu - g = r - \hat{g} \tag{9}$$

δ est le taux de libération de cash Flow ou encore le " taux de rendement " (en termes de cash flow libre) global de la firme[16]. Le cash flow d'exploitation libéré par la firme étant ensuite réparti entre les différents apporteurs de capitaux (actionnaire et/ou prêteurs)[17].

[16] Le « rendement d'une action » est le ratio dividende/Cours. Le concept est ici similaire sauf que l'on se place au niveau de la valeur totale de la firme, c'est-à-dire de l'ensemble des titres qu'elle a pu émettre et non plus d'une catégorie particulière de titres.

[17] Il est certain que la firme dispose théoriquement d'un degré de liberté. Pour la partie du cash Flow Libre disponible pour les actions, il lui est possible soit d'en distribuer la totalité en dividende soit d'en retenir une partie en placements financiers. Dans le contexte de Modigliani Miller ces placements ne sont pas créateurs de valeur, ils ne modifient donc pas la valeur de l'entreprise, au sens de la valeur de ses actifs économiques. Autrement dit, l'arbitrage

1.3 Les spreads de crédit

Si on considère, d'une manière assez générale, que le défaut de la firme survient lorsque la valeur de l'entreprise heurte un seuil K, le temps de défaut τ est un temps d'arrêt défini par:

$$\tau = \inf \{ t \, | V_t \leq K \}$$

On note $Q^T(V_0, r_0, T) = \Pr ob^{Q^T} (\tau \leq T \, | \tau > 0)$, la probabilité courante (à la date zéro) d'un défaut survenant avant l'échéance T sous la mesure corrigée du risque forward-neutre. La mesure de probabilité T-forward neutre est la mesure de probabilité sous laquelle les prix relatifs dont le numéraire est le bon zéro coupon d'échéance T sont des martingales. Le prix courant d'un bon zéro coupon risqué $b\,(V_0,r_0,T)$ d'échéance T est obtenu par:

$$b\,(V_0, r_0, T) = B\,(r_0, T)\left[1 - Q^T\,(V_0, r_0, T)\,\omega\right] \tag{10}$$

où

$B\,(r_0, T)$: prix courant (à la date zéro) du bon zéro coupon non risqué d'échéance T .

$Q^T\,(V_0, r_0, T)$: Probabilité forward-neutre de défaut avant l'échéance T, con-

placement-dividende est neutre au niveau de la valeur de la firme. Il n'en reste pas moins vrai que ce choix n'est pas sans incidence sur les valeurs respectives des actions et de la dette. La valeur de la dette risquée est accrue par les fonds laissés dans entreprise par les actionnaires en placements financiers. Les dividendes auxquels les actionnaires ont ainsi renoncé viennent contribuer à garantir la dette au bilan. Cette politique est toutefois assimilable à un choix différent en matière de taux net d'endettement, l'endettement net de la firme se définissant comme la différence entre les engagements de son passif et ses placements purement financiers.

ditionnelle à l'information courante.

ω: Taux de non recouvrement exogène du bon risqué (caractérisant le rang et les garanties de la dette risquée considérée).

V_0 et r_0 : niveaux courants de la valeur de la firme et du taux d'intérêt instantané.

Le spread zéro coupon $spread(0,T)$ est égal, par définition, à la différence entre le taux zéro coupon risqué $R(0,T) = -\frac{\ln b(V_0,r_0,T)}{T}$ et le taux zéro coupon non risqué $r(0,T) = -\frac{\ln B(r_0,T)}{T}$. Il est donc égal à:

$$spread(0,T) = -\frac{\ln\left[1-Q^T\left(V_0,r_0,T\right)\omega\right]}{T} \tag{11}$$

Il en ressort que le niveau du spread de crédit dépend directement de la probabilité de défaut sous la mesure forward-neutre. Une augmentation de cette probabilité de défaut se traduira par un élargissement du spread zéro coupon et inversement. Dans le cadre d'un modèle unifactoriel à taux déterministe la mesure $\mathbb{Q}^T$ se confond avec la mesure risque neutre classique $\mathbb{Q}$. Notre objectif sera donc, en premier lieu, d'étudier l'incidence des variations du taux d'intérêt sur cette probabilité de défaut corrigée du risque, dans le cadre de modèles à un facteur (taux non stochastique) ou à deux facteurs (taux stochastique).

2 Le risque de taux dans les modèles à un facteur

Les modèles de type Merton adoptent l'hypothèse d'un taux d'intérêt instantané r constant. La valeur de l'entreprise est la variable stochastique de base. Les modèles diffèrent entre eux en fonction du mécanisme du défaut (défaut uniquement à l'échéance d'une dette du type zéro coupon ou barrière absorbante) et en fonction des hypothèses sur le seuil de défaut (Seuil constant ou évolution dans le temps déterministe ou stochastique du seuil de défaut). Cette deuxième série d'hypothèses est surtout importante dans l'étude de la structure des spreads mais point dans l'analyse de la réaction des spreads aux variations du taux d'intérêt. Nous en resterons donc à l'hypothése d'un seuil de défaut constant .

2.1 Spreads et taux d'intérêt

L' approche standard part directement du processus stochastique suivi par la valeur V de l'entreprise. Elle retient un processus de la valeur de l'entreprise, sous la probabilité objective $\mathbb{P}$, qui est généralement:

$$dV_t = (\mu - \delta) .V_t.dt + \sigma.V_t.dW_t$$

Sous la probabilité $\mathbb{Q}$ neutre au risque, ce processus s'écrit:

$$dV_t = (r - \delta) .V_t.dt + \sigma.V_t.d\hat{W}_t$$

En suivant une approche classique de statique comparative, une variation exogène du taux d'intérêt semble modifier le drift du processus risque neutre. Une hausse de taux entraînerait une hausse de la probabilité risque neutre de défaut. Ce faisant, il est implicitement postulé, si μ est supposé constant, que la prime de risque par unité de risque associée au risque W_t, soit $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$est réduite[18]. D'un point de vue économique, la baisse du spread ne s'explique que par cette diminution arbitraire de la prime de risque associée au seul facteur de risque introduit dans le modèle.

La logique de statique comparative conduirait plutôt à maintenir une prime de risque constante, ce qui aurait pour conséquence de faire varier la rentabilité attendu sur la valeur de la firme $\mu = r + \lambda\sigma$ parallèlement au taux d'intérêt. Ce faisant il n'est plus possible de maintenir constante la valeur courante de la firme. Une approche par les cash-flows qui conduit à l'équation (7) montre qu'une hausse de μ, à cash-flows donnés, fait baisser la valeur courante de l'entreprise.

Par ailleurs, toujours dans le même contexte de statique comparative faisant varier le taux d'intérêt, δ ne peut être pris comme un paramètre exogène constant.

Ainsi, s'il se produit une variation du taux d'intérêt instantané r, le rendement global δ, tel qu' il ressort de l'équation (9), subit la même variation. Si, par exemple, le taux d'intérêt augmente, comme le montre (7), la valeur de la

[18]Les calculs habituels, où δ est maintenu constant alors qu'il est considéré une variation de r, supposent implicitement une prime de risque d'exploitation ayant la forme $\lambda = \lambda_0 - \frac{r}{\sigma}$. Une variation du taux r est alors annulée par une variation de la prime de risque de sens contraire, de sorte que $\mu = r + \lambda\sigma = \lambda_0\sigma$ et la valeur de l'entreprise $V = \frac{X}{\mu - g}$ restent inchangés. En conséquence le taux d'endettement de l'entreprise est de facto diminué (en le mesurant par le ratio γ défini plus loin, par exemple).

firme décroît et le ratio

$$\delta = \frac{X}{V}$$

augmente en conséquence. Autrement dit, dans le cadre d'un modèle unifactoriel, dans lequel la valeur de l'entreprise est donnée par (7), on peut tirer la conclusion suivante :

L'espérance de rentabilité des titres faisant contrepartie à la valeur de l'entreprise $\mu = r + \lambda\sigma$ dépend directement du niveau du taux d'intérêt. Elle a deux composantes:

(i) Le rendement en cash flow distribué

$$\delta = r - \hat{g} = \mu - g$$

fonction du niveau du taux d'intérêt. Plus le taux d'intérêt est élevé, plus la valeur de la firme est faible et plus le rendement continu $\delta = \frac{X}{V}$ est important.

(ii) Le taux de plus value, mesuré par le drift $g = \mu - \delta$ de V, qui ne dépend pas directement du taux d'intérêt. Dans le cadre du modèle considéré (croissance régulière), un accroissement du taux d'intérêt laisse inchangé le drift de V. Les variations de μ et δ d'une part, et de r et δ d'autre part, s'annulent mutuellement de sorte que le drift objectif $g = \mu - \delta$ n'est point modifié, de même que le drift risque neutre déterminé par $\widehat{g} = r - \delta$.

Il faudrait réécrire les processus suivis par la valeur de la firme pour souligner l'insensibilité des drifts aux variations exogènes du taux d'intérêt:

Si la valeur de la firme correspond à l'expression (7), alors elle suit le processus:

$$dV_t = g.V_t.dt + \sigma.V_t.dW_t \tag{12}$$

Qui devient sous la mesure martingale équivalente considérée :

$$dV_t = \hat{g}.V_t.dt + \sigma.V_t.d\hat{W}_t \tag{13}$$

où $\hat{g}$ est défini par (3) et (8).

La baisse instantanée de la valeur courante de l'entreprise, accompagnée d'un maintien du drift neutre au risque, se traduisent , au final, par une hausse de la probabilité risque neutre de défaut et par un élargissement des spreads de crédit et non par un rétrécissement. Intrinsèquement, les modèles structurels standards à un facteur prédisent que la sensibilité de la dette risquée est plus forte que la sensibilité de la dette exempte de risque de crédit[19].

On constate aussi que le ratio δ n'est pas une variable anodine. Son influence finale sur le spread de crédit est importante. Il apparaît ainsi qu'un taux de rendement plus fort équivaut, par son effet sur le spread de crédit, à augmenter le taux d'endettement de la firme. La relation (9) montre que, à espérance de rentabilité donnée, δ est d'autant plus élevé que la croissance de la firme est

[19]Dans un modèle unifactoriel le taux d'intérêt est supposé constant. Mais l'incidence d'une variation du taux est étudiée en statique comparative. C'est ainsi que sont obtenues des mesures de sensibilité au taux d'intérêt de la dette risquée. Quoique plus discutable, la démarche reste la même dans un modèle bifactoriel où le taux est stochastique. Les calculs de sensibilité sont réalisés en considérant une variation instantanée du taux courant. Le calcul lui-même est discutable, car il néglige la corrélation éventuelle entre un choc sur le taux courant et un choc sur la valeur courante de l'entreprise. Ce point sera souligné par la suite à travers la notion de sensibilité stochastique d'une dette risquée.

faible (Une croissance faible permet à la firme de distribuer une part importante de son cash flow avant investissement, tandis qu'une croissance plus soutenue oblige la firme à en réinvestir une plus grande proportion et réduit donc le taux de rendement). L'espérance de la valeur future de la firme, $E_t(V_T)$ avec $T > t$, est une fonction décroissante de δ, toutes choses égales par ailleurs. Le poids relatif des engagements futurs de l'entreprise est d'autant plus lourd par rapport aux actifs maintenus dans l'entreprise que la libération d'un cash non réinvesti est forte.

Autant dire que le modèle de Merton et ses héritiers directs à un facteur ne sont pas en mesure de fournir une réelle explication à la diminution, empiriquement observée, des spreads qui accompagne une hausse de taux.

L'analyse de l'incidence d'une variation exogène de la prime de risque doit également être revue sur la base de considérations similaires.

2.2 Spread de crédit et Prime de risque

Nos développements sur la relation spread de crédit-taux d'intérêt, dans les modèles à un facteur, peuvent être complétés par des considérations similaires sur la relation spread de crédit-prime de risque d'exploitation.

Huang et Huang (2003) p. 7 résument assez bien ce que l'analyse courante suggère "*Note that the real default probability depends on the risk premium associated with the firm's asset, while the bond price does not*". Si le "drift" du processus risque neutre de la valeur V de l'entreprise est rV ou $(r - \delta) V$, il semble que les probabilités de défaut risque neutres, les prix des obligations et des bons risqués et, finalement les spreads, soient indépendants de la prime de risque d'exploitation. Conclusion paradoxale s'il en est. Dans la présentation la plus habituelle du modèle de Merton, une hausse exogène de la prime de risque λ, reste sans effet apparent sur le drift Risque Neutre $r-\delta$ de V. La probabilité de défaut sous la mesure $\mathbb{Q}$ reste donc inchangée. Les spreads de crédit paraissent ne pas devoir réagir à une variation exogène de la prime de risque. Le lien prime de risque d'exploitation-spread est occulté, alors que, bien évidemment le spread reflète la prime de risque d'exploitation[20]. Dans un modèle à un facteur, il n'y a qu'une source de risque amplifié ou amorti au niveau de tel ou tel titre particulier. Une hausse exogène de la prime de risque λ signifie, à taux d'intérêt donné, une plus grande exigence de rentabilité de la part des détenteurs des actifs de la firme, autrement dit une hausse de $\mu = r + \lambda\sigma$. Toutes choses égales par ailleurs, il en résulte une baisse de la valeur de l'entreprise V et une hausse du coefficient de distribution $\delta = \mu - g$. Les conséquences en sont, une baisse du drift Risque Neutre $r-\delta = g - \lambda\sigma$, une hausse de la probabilité de défaut Neutre au risque[21] et une hausse du spread. De même que dans le modèle d'évaluation d'options de Black & Scholes il y a une volatilité implicite σ dans le prix d'une option, de même y a-t-il une prime de risque d'exploitation λ implicite dans un spread de crédit.

Le tableau ci-dessous résume notre analyse des propriétés de statique com-

[20] Dans un modèle unifactoriel d'où sont absentes les distorsions pouvant provenir d'un défaut de liquidité ou d'une discrimination dans le traitement fiscal, le spread a deux composantes: la prime de défaut, simple compensation pour un agent neutre au risque de la perte subie en cas de défaut, et la prime de risque qui n'est que le reflet de la prime d'exploitation λ.

[21] Pour une double raison: La baisse de V qui rapproche l'entreprise de son seuil de défaut et la diminution du drift $r - \delta$.

parative des modèles structurels standards à un facteur (Effets d'une variation exogène du taux d'intérêt ou de la prime de risque, toutes choses égales par ailleurs):

Modification exogène du paramètre	Analyse courante	Notre analyse (approche par les cash flows)
Accroissement de la prime de risque λ	drift RN $r-\delta$ inchangé Prob défaut RN inchangée *Spread inchangé*	hausse $\mu = r + \lambda\sigma$ Baisse V Hausse $\delta = \mu - g$ baisse drift RN $r - \delta = g - \lambda\sigma$ *Hausse spread*
Augmentation du taux d'intérêt r	Hausse dift RN $r - \delta$ Baisse prob défaut RN *Baisse spread*	Hausse $\mu = r + \lambda\sigma$ Baisse V Hausse $\delta = \mu - g$ Drift RN inchangé $r - \delta = g - \lambda\sigma$ Hausse *Spread*

r : Taux d'intérêt sans risque instantané

λ : Prime de risque d'exploitation par unité de risque

σ : Volatilité des actifs

g : Taux de croissance de la fime (de ses Cash Flows libres d'exploitation et ainsi de V)

$\delta = \frac{X}{V}$: Taux instantané de distribution de Cash Flows libres.

3 Le risque de taux dans les modèles à deux facteurs

Le modèle de Longstaff & Schwartz (1995) constitue sans doute la référence dans les modèles structurels à deux facteurs et ses successeurs n'ont pas modifié la nature de la relation entre taux et spread que nous étudions[22]. Ses caractéristiques seront rappelées dans un premier paragraphe. Le concept de sensibilité stochastique d'une dette risquée est introduit dans un deuxième paragraphe et appliqué ensuite au modèle Longstaff & Schwartz.

3.1 Le modèle de Longstaff Schwartz

Le modèle de Longstaff & Schwartz (1995) qui fait suite à Shimko & al.(1993) introduit deux innovations essentielles dans le modèle de Merton:

- A l'instar de Black & Cox (1976) il retient une barrière du type « down and out ». Ce seuil de défaut (exogène) K ouvre la possibilité d'un défaut à tout instant. A chaque échéance de règlement de la dette correspond la probabilité que la firme fasse défaut avant cette échéance. Le taux de recouvrement étant lui-même fixé de manière exogène, il devient possible de valoriser tout titre de dette risquée (dette couponnée ou dette zéro coupon, dette à taux fixe ou dette à taux variable). La propriété d'additivité, ap-

[22] A l'exception de Hsu J. C. & J. Saa-Requejo & P. Santa-Clara (2004) qui font en sorte que le seuil de défaut K ait un drift identique à celui de la valeur V de l'entreprise sous la probabilité neutre au risque. Le drift de V devient donc sans importance. mais la justification de cette propriété avancée par les auteurs est extrêmement discutable.

plicable sur la dette non risquée, réapparaît (Une dette couponnée risquée peut être évaluée à partir des bons zéro coupon risqués la composant).

- La principale caractéristique nouvelle est celle d'un taux d'intérêt stochastique. Comme Shimko et al.(1993), qui avaient toutefois conservé les autres caractéristiques du cadre de Merton (1974) et notamment le défaut ne pouvant survenir qu'à la maturité d'une dette unique, leur choix du modèle de structure des taux est celui de Vasicek (1977)[23].

Les principales hypothèses du modèle sont les suivantes :

H1 : *La valeur totale de la firme est censée avoir la dynamique définie par l'équation:*

$$dV_t = (\mu - \delta) . V_t . dt + \sigma . V_t . dW_t$$

H2 : *Le taux d'intérêt instantané suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ayant la forme :*

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma' dW_t' \tag{14}$$

où θ est le taux d'intérêt qui tend à s'instaurer à long terme, a est la vitesse d'ajustement, σ' la volatilité du taux court et dW_t' un aléa corrélé avec l'aléa

[23] Choix conservé par la grande majorité des modèles à deux facteurs. il en est ainsi, par exemple, de Collin-Dufresne & Goldstein (2001) ou Hsu & Saà-Requejo & Santa-Clara (2004).

dW_t affectant la valeur de l'entreprise de sorte que:

$$dW_t.dW'_t = \rho.dt \tag{15}$$

H3 : *La prime unitaire de risque de taux λ' et la prime unitaire de risque d'exploitation*[24] *λ sont constantes (Aucune de ces deux hypothèses n'est clairement énoncée par LS. Mais elle est implicite, pour le risque de taux, dans leurs calculs)*

H4 : *Le défaut survient lorsque la valeur de l'entreprise heurte pour la première fois une barrière exogène K. Lors du défaut les prêteurs subissent une perte $0 \leq \omega < 1$ sur la valeur sans risque de leur titre de créance.*

H5 : *les marchés de capitaux sont parfaits et se déroulent en temps continu.*

En fait l'hypothèse H1 et l'hypothèse H3 sont incompatibles comme le fera ressortir la section suivante. Si le taux d'intérêt fluctue de manière stochastique tandis que l'espérance de rentabilité instantanée de la valeur, soit μ, demeure constante alors il est supposé une prime de risque qui amortit systématiquement les fluctuations du taux. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on devrait avoir:

$$\mu_t = r_t + \lambda\sqrt{1-\rho^2}\sigma + \lambda'\rho\sigma' \tag{16}$$

Si $\lambda, \lambda', \rho, \sigma$ et σ' sont constants, alors les variations de μ_t devraient refléter les fluctuations de r_t.

[24] *Prime associée au risque d'exploitation pur, non corrélé au risque de taux.*

Si on note $Q^T(V_0, r_0, T)$, la probabilité courante (à la date zéro) de défaut avant l'échéance T sous la mesure forward-neutre , le prix courant d'un bon zéro coupon risqué $b(V_0,r_0,T)$ d'échéance T est obtenu par:

$$b(V_0, r_0, T) = B(r_0, T)\left[1-Q^T(V_0, r_0, T)\,\omega\right] \tag{17}$$

où

$B(r_0, T)$: prix courant (à la date zéro) du bon zéro coupon non risqué d'échéance T de Vasicek (1977).

$Q^T(V_0, r_0, T)$: Probabilité forward neutre de défaut avant l'échéance T, conditionnelle à l'information courante[25].

ω: Taux de non recouvrement exogène du bon risqué (caractérisant le rang et les garanties de la dette risquée considérée).

V_0 et r_0 : niveaux courants de la valeur de la firme et du taux d'intérêt instantané.

Dans ces conditions la "sensibilité classique" (calculée sur la base d'une variation du niveau initial du taux r en statique comparative) du bon risqué est inférieure à la duration du bon non risqué correspondant. Comme le font ressortir Longstaff & Schwartz (1995) une hausse du taux d'intérêt entraîne un rétrécissement des spreads en raison de la baisse de la probabilité de défaut corrigée du risque[26].

[25] Longstaff & Schwartz (1995) donnent l'algorithme de calcul de cette probabilité. Il est corrigé par Collin-Dufresne & Goldstein (2001).

[26] $Q_r^{T\prime}(V, r, T) < 0$. Voir leur figure 4.

Mais la finalité des mesures de duration est en général de fournir au détenteur d'un portefeuille une appréciation des effets qu'entraîne une fluctuation aléatoire (non anticipée) du taux d'intérêt sur le prix de ses titres[27]. Or un mouvement aléatoire du taux d'intérêt tend à être accompagné d'une variation de la valeur de l'entreprise en raison de la corrélation (en principe négative) entre les aléas affectant ces deux variables[28], facteur négligé par Longstaff & Schwartz (1995) dans leurs mesures de sensibilité. Un choc à l'origine d'une hausse du taux d'intérêt aura ainsi un triple effet sur un bon risqué dont le prix résulte de la formule (17):

- La hausse du taux fait, en soi, baisser le prix du bon non risqué comme l'indique la mesure classique de duration stochastique de Vasicek
- La hausse du taux tend à modifier le drift du processus corrigé du risque de V et affecte ainsi la probabilité de défaut.
- La hausse du taux tend à être accompagnée par une baisse de la valeur de l'entreprise (si le coefficient ρ est négatif). Ce dernier phénomène tend à élargir le spread de crédit et à renforcer la duration du bon risqué par

[27] C'est ce que mesure la "duration stochastique" définie par Cox & Ingersol & Ross (1979) et que tente de généraliser Munk (1999) par exemple. Mais Munk n'envisage que des obligations exemptes de risque de défaut et non des titres sensibles à des facteurs de risque étrangers à ceux qui contribuent à la détermination de la structure des taux, quoique pouvant leur être corrélés. C'est pourquoi le concept doit faire l'objet d'une généralisation dans le cas de dettes risquées.

[28] La corrélation entre dW et dW' est la résultante de deux dépendances:

- Un mouvement aléatoire positif du taux fait, en soi, baisser la valeur de la firme à cash flows d'exploitation et prime de risque d'exploitation donnés.
- Il peut exister une corrélation négative (dans ce cas le premier effet est renforcé) ou positive (dans ce cas le premier effet est atténué voire inversé) entre taux et cash flows d'exploitation. En général la corrélation est plutôt négative sauf pour certaines activités (banques par exemple)

  A ces deux effets pourrait s'ajouter l'incidence de la relation mal connue entre le taux et la prime de risque d'exploitation.

rapport au bon sans risque de même échéance.

Le concept de sensibilité stochastique étendu à la dette risquée permet de préciser ces relations.

3.2 sensibilité stochastique d'un bon risqué

La notion de sensibilité stochastique applicable à une dette risquée est destinée à mesurer l'incidence, sur le prix d'un bon risqué, d'un aléa affectant le taux d'intérêt[29]. Dans l'expression relativement générale d'un Bon Zéro Coupon Risqué (17) le terme $\left[1-Q^T\left(V_0,r_0,T\right)\omega\right]$ représente l'espérance de recouvrement à l'échéance T sous la mesure T-forward neutre. En posant, afin de simplifier la notation:

$$q\left(V_0,r_0,T\right)=\left[1-Q^T\left(V_0,r_0,T\right)\omega\right]$$

l'EDS caractérisant la dynamique du prix du bon zéro coupon risqué de maturité T est:

$$\frac{db_t}{b_t}=\mu_{bt}dt+\left(s_{Bt}+\frac{q'_{rt}}{q_t}\right)\sigma' dW'_t+\frac{q'_{Vt}}{q_t}\sigma dW_t \tag{18}$$

où

$\mu_{bt}=\mu_b\left(V_t,r_t,T\right)$

et

[29] Ou, plus généralement, les facteurs qui contribuent à la détermination de la courbe des taux

$s_{Bt} = \frac{B_r'(r_t,T)}{B(r_t,T)} < 0$ mesure la sensibilité stochastique du Bon Zéro Coupon non Risqué[30].

En raison de l'hypothèse (15), l'équation (18) peut s'écrire:

$$\frac{db_t}{b_t} = \mu_{bt}dt + \left(s_{Bt} + \frac{q_{rt}^{'}}{q_t} + \frac{q_{Vt}^{'}}{q_t}\frac{\sigma}{\sigma'}\rho \right)\sigma' dW_t' + \frac{q_{Vt}^{'}}{q_t}\sqrt{1-\rho^2}\sigma\widetilde{dW}_t \tag{19}$$

où

$\widetilde{dW}_t \perp dW_t'$, $\widetilde{dW}_t$ représentant l'aléa, autre que le taux, affectant la valeur de la firme (indirectement, l'aléa ou une partie de l'aléa portant sur les cash flows)

Cette équation explicite ce que sera l'incidence sur le prix du bon d'une variation imprévue sur le taux $\sigma' dW_t'$. La sensibilité stochastique du bon zéro coupon risqué s_{bt} peut donc être définie par l'expression:

$$s_{bt} = s_{Bt} + \frac{q_{rt}^{'}}{q_t} + \frac{q_{Vt}^{'}}{q_t}\frac{\sigma}{\sigma'}\rho \tag{20}$$

Cette expression fait ressortir l'existence de *trois composantes* dans la sensibilité stochastique d'un bon risqué: Elle ajoute à la sensibilité du bon sans risque de même échéance, $s_{Bt} < 0$, deux autres facteurs, propres au bon risqué, qui traduisent l'effet d'une variation du taux sur la dynamique ou sur le niveau de

[30]La sensibilité ou la duration de Macauley d'un bon zéro coupon non risqué, mesure la sensibilité du bon par rapport à son taux actuariel continu, c'est à dire par rapport au taux zéro coupon. Elle est égale, en valeur absolue, à $\left|\frac{\partial B(t,T)}{\partial r(t,T)}\frac{1}{B(t,T)}\right| = T-t$. La sensibilité stochastique du bon par rapport au taux instantané est égale, en valeur absolue, à $|s_{Bt}| = (T-t)\frac{\partial r(t,T)}{\partial r}$.

la valeur de l'entreprise et donc sur la probabilité de défaut corrigée du risque[31]:

Le deuxième terme, $\frac{q'_{rt}}{q_t}$, mesure ce qu'on peut appeler "l'effet drift". La hausse du taux modifie le drift du processus corrigé du risque suivi par V. Dans le modèle Longstaff & Schwartz (1995), $q'_{rt} > 0$, puisqu'il est supposé que le taux de croissance instantané corrigé du risque de V subit une variation instantanée égale au mouvement initial du taux d'intérêt[32].

Le troisième terme, $\frac{q'_{Vt}}{q_t}\frac{\sigma}{\sigma'}\rho$, mesure ce qui peut être qualifié "d'effet de corrélation". Un aléa sur le taux d'intérêt tend à être accompagné d'un aléa sur V en raison de la corrélation entre ces deux variables. Comme Longstaff & Schwartz négligent ce troisième facteur ils en déduisent *ipso facto* que la sensibilité d'un bon risqué est plus faible, en valeur absolue, que celle d'un bon sans risque. Leur simulation numérique qui envisage, en statique comparative, une hausse du taux d'intérêt fait ainsi apparaître un rétrécissement des spreads à la suite d'une hausse du taux d'intérêt (Voir leur figure 4). En reprenant les mêmes valeurs de paramètre (avec $\rho = -0,25$, en particulier[33], et un taux initial à 4%), mais en appréciant l'incidence sur les spreads à partir de la mesure complète de sensibilité stochatisque, s_{bt}, intégrant le troisième terme de (20), on aboutit, en réalité, à un résultat inverse. La hausse du taux d'intérêt est accompagnée par un élargissement des spreads sur bons zéro coupon[34] : $R(t,T) - r(t,T)$ ainsi

[31] A seuil de défaut, K , et taux de recouvrement, ω, donnés.

[32] Le drift corrigé du risque étant $\left(r_t - \delta + \rho\sigma\sigma' s_{B_tT}\right) V_t$ avec δ supposé constant . Voir Collin-Dufresne & Goldstein (2001). En réalité LS (95) posent même $\delta = 0$.

[33] On a $q'_V > 0$. et $\rho < 0$. Le troisième facteur tend donc à accroître la valeur absolue de la sensibilité du bon risqué.

[34] $r(t,T)$ représente le taux zéro coupon sans risque et , $R(t,T)$ le taux zéro coupon risqué de la date t pour l'échéance T. Notre graphique représente les spreads zéro coupon, alors que le graphique de LS(95) représente les spreads entre obligations couponnées portant un taux nominal de 8%. cette différence ne change rien aux conclusions.

que l'illustre le graphique (1).

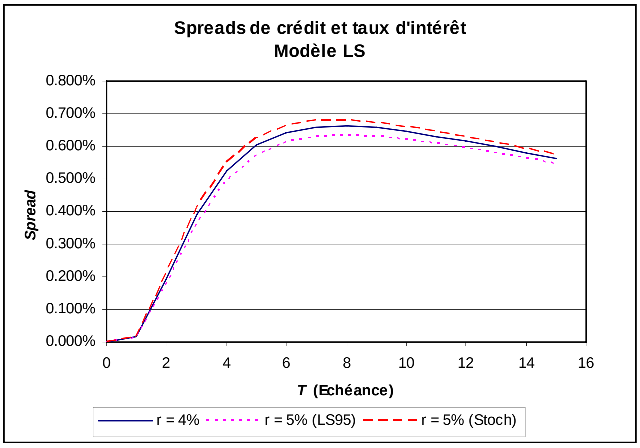

Figure 1: Incidence d'une variation du taux instantané sur les spreads dans le modèle de LS (95). Les valeurs de paramètres utilisées sont celles retenues par LS(95) soit $\frac{V}{K} = 2$, $\omega = 0,50$, $\sigma^2 = 0,04$, $\sigma'^2 = 0,0001$, $\rho = -0,25$, $a = 1$ et $a\theta - \lambda'\sigma' = a\widehat{\theta} = 6\%$. La courbe des spreads mesure l'écart entre les taux zéro coupon risqués et les taux zéro coupon non risqués sur les différentes maturités. Le graphique représente la courbe des spreads avec un taux instantané initial de 4% (trait plein) puis à la suite d'un choc de +1%. Alors que LS (95) concluent à une baisse du spread (Car ils négligent le 3ème terme de (20)), l'analyse en terme de sensibilité stochastique, définie par l'équation (20), fait apparaître, au contraire, une hausse des spreads. Les spreads ont été obtenus à partir des prix des bons zéro coupon risqués donnés par l'équation (17). Dans cette équation les probabilités de défaut ont été estimées à partir de l'approximation de Fortet telle qu'elle est présentée par Longstaff & Schwartz (1995) et a pu être corrigée par Collin-Dufresne (2001). Tous les spreads convergent vers zéro lorsque la maturité tend vers zéro.

Toutefois, les résultats du modèle de Longstaff & Schwartz (1995), même ainsi rectifiés, demeurent soumis à deux limites:

- Le calcul du deuxième terme de l'équation (20) suppose que le drift corrigé du risque de V est $(r_t - \delta + \rho\sigma\sigma' s_{B_tT}) V_t$, avec δ constant. Or il a été montré que δ était un fonction de r_t lui même et amortissait les effets d'une variation de r_t sur le drift de V. Le modèle surestime l'incidence d'un aléa initial de taux sur le drift T-forward neutre et donc surestime le terme q'_{rt}. C'est ce que mettra en évidence l'approche par les cash flows

- La dépendance entre V et r n'est intégrée qu'à travers un coefficient de corrélation ρ exogène, de caractère "statistique". Une approche par les cash flows identifie plus clairement la relation entre V et r qui détermine le troisième terme de la sensibilité stochastique (20).

4 Un modèle à deux facteurs cash-flow orienté

Le modèle de Longstaff & Schwartz (1995), dans sa présentation d'origine revêt une forme que nous qualifions de semi réduite, en ce sens, qu'en toute rigueur, le processus suivi par la valeur de la firme devrait être déduit de manière endogène dans le cadre d'un modèle à deux facteurs cash-flow orienté. A l'hypothèse H1 serait ainsi substituée une hypothèse spécifiant la dynamique du cash flow net d'exploitation X:

H1b: *Le cash flow d'exploitation de la firme suit le processus défini par l'équation:*

$$dX_t = g.X_t.dt + \widetilde{\sigma}.X_t.dW_t$$

$\widetilde{\sigma}$ représente donc la volatilité du cash flow supposée constante[35].

[35] Dans un modèle à deux facteurs la volatilité de la valeur de l'entreprise σ ne correspond plus à la seule volatilité du cash-flow $\widetilde{\sigma}$, mais dépend aussi de la volatilité du taux d'intérêt, comme la suite le montrera.

H2b: *Le taux d'intérêt instantané suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ayant la forme définie par l'équation (14):*

On suppose que[36]

$$dW \perp dW' \tag{21}$$

H3B: *W_t et W_t' sont des mouvements browniens définis sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Il existe deux constantes λ et λ' telles que $W_t + \lambda t$ et $W_t' + \lambda' t$ sont des $(\mathbb{F}, \mathbb{Q})$ mouvements browniens, où $\mathbb{Q}$ est la mesure de probabilité équivalente risque neutre (définie par rapport au compte monétaire sans risque pris comme numéraire). λ et λ' sont respectivement la "prime de risque unitaire d'exploitation" et "la prime de risque unitaire de taux".*

Les hypothèses H4 et H5 du paragraphe précédent sont maintenues. Le processus risque neutre du cash flow sous la mesure $\mathbb{Q}$ devient $dX_t = \widehat{g}.X_t.dt + \widetilde{\sigma}.X_t.d\widehat{W}_t$ avec $\widehat{g} = g - \lambda\widetilde{\sigma}$

Dans ces conditions, la valeur courante de l'entreprise

$$V_t = \int_t^{\infty} \hat{E}_t X_\tau e^{-\int_t^\tau r_s ds} d\tau$$

compte tenu de (21), peut s'écrire :

$$V(X_t, r_t) = \int_t^{\infty} B(r_t, T) \hat{E}_t(X_T) dT = X_t \int_t^{\infty} B(r_t, T) e^{\hat{g}(T-t)} dT$$

[36] *Hypothèse qui n'est pas indispensable, mais qui simplifie les résultats.*

sachant que $B(r_t, T)$ représente le prix courant du bon zéro coupon non risqué d'échéance $T > t$, X_t et r_t étant respectivement les valeurs courantes du cash flow d'exploitation et du taux d'intérêt sans risque et $\hat{E}()$ représentant l'opérateur espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$. On remarque que $V(X_t, r_t)$ est linéaire en X_t.

- La dynamique de la valeur de l'entreprise sous la mesure de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ s'en déduit :

$$\frac{dV_t}{V_t} = \left[\hat{g} + D_t a\left[\widehat{\theta} - r_t\right] + \frac{1}{2} C_t \sigma'^2\right] dt + \widetilde{\sigma} dW_t^{Q^T} + D_t \sigma' dW_t'^{Q^T} \tag{22}$$

Avec

$$\widehat{\theta} = \theta - \frac{\lambda' \sigma'}{a} \tag{23}$$

Dans l'expression (22) , D_t représente la sensibilité de la valeur de la firme et C_t son terme de convexité, mesurées par rapport au taux instantané :

$$D_t = D(r_t) = \frac{V_r'}{V} = -\int_t^{\infty} \gamma_{tT} x(r_t, T) dT < 0 \tag{24}$$

$$C_t = C(r_t) = \frac{V_{rr}''}{V} = \int_t^{\infty} \gamma_{tT}^2 x(r_t, T) dT \tag{25}$$

Les formules (24) et (25) s'interprètent aisément en remarquant que:

$$\gamma_{tT} = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \tag{26}$$

est la sensibilité (en valeur absolue) du bon zéro coupon non risqué et que

$$\gamma_{tT}^2$$

en est le terme de convexité, d'après les propriétés classiques du modèle de Vasicek (77)

et qu'enfin $x\left(r_t, T\right)$ mesure la contribution du cash flow futur espéré de la date $T > t$ à la valeur totale de l'entreprise

$$x\left(r_t, T\right) = \frac{B(r_t, T) X_t e^{\hat{g}(T-t)} dT}{\int\limits_t^\infty B(r_t, T) X_t e^{\hat{g}(T-t)} dT} = \frac{B(r_t, T) e^{\hat{g}(T-t)} dT}{\int\limits_t^\infty B(r_t, T) e^{\hat{g}(T-t)} dT}$$

Avec

$$\int_t^\infty x\left(r_t, T\right) dT = 1$$

La sensibilité de la valeur de l'entreprise apparaît donc égale à la moyenne des sensibilités des bons zéro coupon pondérée par la valeur actuelle des cash flow d'exploitation de même échéance (Plus précisément, le coefficient de pondération de la sensibilité du bon d'échéance $T > t$ est le poids du cash flow de T dans la valeur totale de la firme soit $x\left(r_t, T\right)$). Il en va de même pour la convexité. La sensibilité (mesurée par rapport au taux instantané et non par rapport au taux actuariel du titre considéré) de chaque bon zéro coupon étant majorée par $\frac{1}{a}$, il en est ainsi pour la duration de la valeur de la firme. Dans (22) le terme $|D| .a$ est ainsi inférieur à 1.

Si dans (22) on considère le drift de V on constate qu'il dépend, bien évidemment, du niveau courant du taux d'intérêt. En identifiant dans (22) le drift risque neutre à $r_t - \delta_t$ on en déduit le taux de distribution:

$$\delta\left(r_t\right) = r_t - \left[\hat{g} + D\left(r_t\right) a\left(\widehat{\theta} - r_t\right) + \frac{1}{2} C\left(r_t\right) \sigma'^2\right] \tag{27}$$

Il n'est pas un paramètre constant. Il est fonction du niveau du taux d'intérêt comme le montre la figure (2):

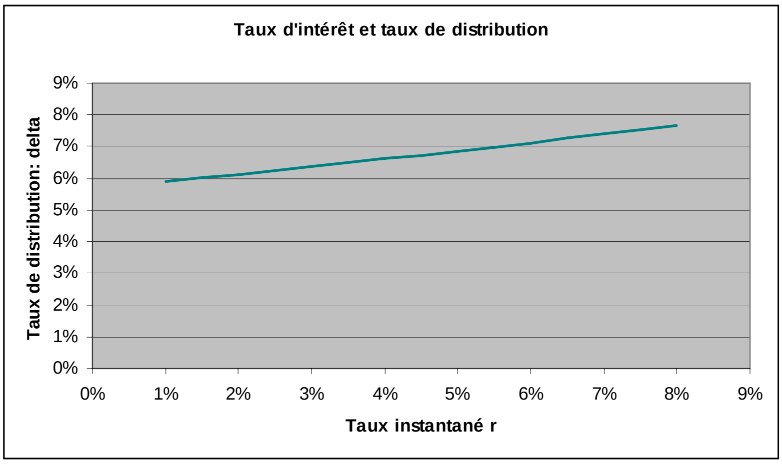

Figure 2: Dans le modèle à deux facteurs cas-flow orienté, le taux de distribution δ est une fonction croissante du taux d'intérêt instantané r. Illustration avec les valeurs de paramètre de l'annexe.

Le taux de croissance instantané risque neutre de V attendu, soit $r - \delta(r)$ est bien une fonction croissante du taux r, mais sa dérivée par rapport à r

est inférieure à 1, contrairement au résultat classiquement obtenu en posant δ constant. Par rapport au modèle à un facteur[37], la moindre sensibilité de $\delta(r)$ aux variations du taux d'intérêt tient à la sensibilité atténuée de la valeur de la firme. Dans un modèle à un facteur la variation de taux est censée être définitive et la structure des taux est plate, tandis que dans un modèle comportant un mécanisme de retour à la moyenne la variation de taux a un caractère transitoire. La déformation de la structure des taux, où les taux longs réagissent moins que les taux courts au choc sur le taux instantané, donne une inertie aux facteurs d'actualisation des cash flows.

On remarquera que le coefficient de corrélation entre la valeur de l'entreprise ($\frac{dV_t}{V_t}$) et le taux d'intérêt (dr_t) est égal à[38]

$$\rho_t = \frac{\sigma'}{\sqrt{\widetilde{\sigma}^2 + D_t^2 \sigma'^2}}.D_t = \frac{\sigma'}{\sigma_t}.D_t < 0 \tag{28}$$

où

$$\sigma_t = \sqrt{\widetilde{\sigma}^2 + D_t^2 \sigma'^2} \tag{29}$$

est la volatilité de la valeur de l'entreprise qui reflète la double incidence du risque d'exploitation et du risque de taux.

- La dynamique de la valeur de l'entreprise sous la mesure de probabilité T-forward neutre $\mathbb{Q}^T$ s'en déduit :

[37] Où cette dérivée est nulle.
[38] En l'absence supposée de corrélation entre le taux d'intérêt et les cash-flows de la firme.

$$\frac{dV_t}{V_t} = \left[\hat{g} + D_t a \left[\overline{\theta}(t) - r_t\right] + \frac{1}{2} C_t \sigma'^2\right] dt + \widetilde{\sigma} dW_t^{Q^T} + D_t \sigma' dW_t'^{Q^T} = \left(r_t - \delta_t - D_t \sigma'^2 \gamma_{tT}\right) dt + \widetilde{\sigma} dW_t^{Q^T} + D_t \sigma \tag{30}$$

Avec

$$\overline{\theta}(t) = \theta - \frac{\lambda' \sigma'}{a} - \frac{\sigma'^2}{a} \gamma_{tT} \tag{31}$$

Un aléa positif affectant le taux fait directement baisser la valeur de l'entreprise comme le montre le terme $D_t \sigma' dW_t'^{Q^T} = \rho_t \sigma_t dW_t'^{Q^T}$. Les Probabilités forward neutre de défaut sont abaissées, en raison de la chute de la valeur de l'entreprise qui résulte de cette variation du taux d'intérêt. Les spread de défaut sont donc élargis[39]. Les conclusions obtenues en matière de relation spread-taux sont similaires à celles qui se dégagent dans les modèles unifactoriels. Ces conclusions sont assez peu dépendantes de l'hypothèse d'indépendance entre l'aléa d'exploitation affectant les cash-flows libres de la firme W_t et l'aléa de taux W_t'. Si cette corrélation était négative, comme c'est sans doute le cas pour la majorité des entreprises, elle ne ferait que renforcer l'incidence négative de la hausse du taux d'intérêt sur la valeur de l'entreprise et contribuerait donc au renforcement des spreads de crédit. Il faudrait donc une corrélation positive[40] pour que la relation taux-spread soit affaiblie voire inversée.

[39] Voir démonstration en annexe B

[40] Que peu de secteurs connaissent. Les banques sont soumises à une influence contradictoire. Un effet de marge positif, en cas de hausse des taux, entre le taux de leurs emplois et le coût de leurs ressources (dont une partie n'est pas affectée par une variation de taux) et un effet de volume de sens contraire, en raison du frein apporté à la distribution de crédit.

Le graphique de la figure (3) illustre la relation entre le niveau du taux d'intérêt instantané et la valeur de l'entreprise. Par rapport au modèle de Gordon Shapiro, on constate, toutefois, que la valeur de l'entreprise est relativement moins modifiée à la suite d'une variation instantanée du taux, en raison de la tendance de ce dernier à revenir à son niveau de long terme. L'écart entre les deux courbes est une mesure de l'erreur commise en recourant au modèle de Gordon Shapiro, si l'évolution des taux sans risque est commandée par un processus de Vasicek. Une autre façon de formuler la même idée consiste à constater que la mesure de la prime de risque à partir d'un modèle type Gordon Shapiro risque de faire apparaître des variations de la prime mesurée alors que la prime sous jacente reste fondamentalement constante. Elle tendra à surestimer la prime de risque lorsque les taux sont bas et à la sous estimer dans la situation inverse de taux élevés.

- La dynamique de la valeur de l'entreprise V sous la probabilité objective $\mathbb{P}$ revêt une forme similaire:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \left[g + D_t a(\theta - r_t) + \frac{1}{2}C_t \sigma'^2\right] dt + \widetilde{\sigma} dW_t + D_t \sigma' dW'_t \tag{32}$$

- Le drift de V a trois composantes:
  - Le taux de croissance g des cash-flows de la firme
  - un mouvement de retour à la moyenne induit par la tendance du taux d'intérêt, avec une vitesse de convergence dépendant de la duration modifiée (sensibilité) de l'action. A long terme, cette fraction du drift

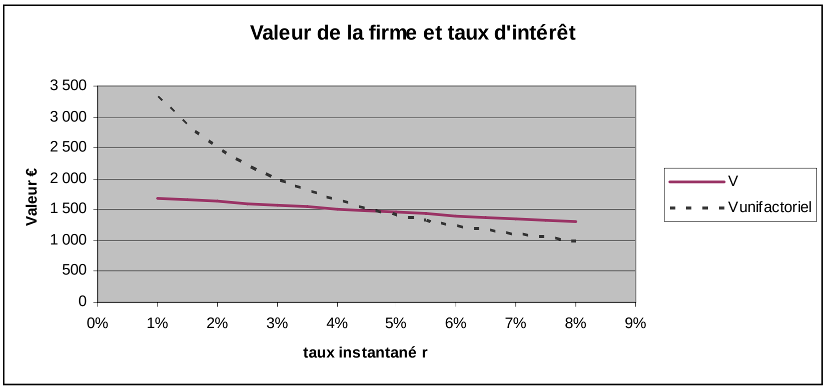

Figure 3: Valeur de l'entreprise et taux d'intérêt dans le modèle à deux facteurs Cash-flow orienté. La valeur de l'entreprise V est beaucoup moins sensible aux variations du taux, puisque les agents anticipent un retour vers un niveau de long terme et qu'un choc sur le taux a un caractère transitoire. Dans le modèle de Gordon Shapiro, au contraire, une variation de taux est censée être définitivement acquise et modifie donc fortement la valeur de l'entreprise ($V uni\,\mathrm{factor}\,iel$). Illustration avec les valeurs de paramètre de l'annexe.

tend vers zéro.

– Un terme de convexité de l'action appliqué à la volatilité du taux d'intérêt qui converge à long terme vers la valeur $\frac{1}{2}C\,(b)\,\sigma'^2$.

A long terme le drift de V converge vers $g+\frac{1}{2}C\,(b)\,\sigma'^2$, le taux de croissance fondamental de la firme corrigé du terme de convexité.

Le drift de V peut s'écrire classiquement $[\mu\,(r_t)-\delta\,(r_t)]\,V_t$ sous réserve de remplacer $\delta\,(r_t)$ par son expression (27) et sachant que $\mu\,(r_t)=r_t+\lambda\widetilde{\sigma}+D_t\sigma'\;\lambda'$, équation identique à (16) en retenant un coefficient de corrélation correspondant à (28) et la volatilité de V donnée par (29).

Conclusion

Analysant les propriétés de leur modèle, Longstaff & Schwartz (1995) notent

"Thus, the model implies that credit spreads narrow as interest rates increase. The reason for this counterintuitive implication is that an increase in the interest rate increases the drift of the risk neutral process for V, which in turn makes the risk-neutral probability of a default lower. Consequently, the credit spread is inversely related to the level of the interest rates in this model"

Une approche par les cash-flows démontre que le drift du processus risque neutre de V n'est pas égal au taux d'intérêt, et qu'un accroissement de ce taux n'affecte pas le drift de V, du moins dans un modèle unifactoriel. Le drift du processus corrigé du risque de V dans un modèle à deux facteurs cash-flow orienté a une forme plus complexe, mais les fluctuations du taux r_t s'y trouvent amorties, partiellement, par les variations du taux de distribution $\delta(r_t)$. Dans ces conditions le «résultat contre intuitif» disparaît. Lorsque Longstaff & Schwartz (1995) écrivent que le drift du processus objectif de V est μ et que le drift du processus risque neutre est r_t qui suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, il est, soit fait l'hypothèse implicite que la prime de risque d'exploitation λ (associée à l'aléa d'exploitation affectant V) amortit systématiquement les fluctuations du taux d'intérêt, si μ est supposé constant, soit que μ suit un processus du même type que r si la prime de risque est maintenue constante. Dans ce dernier cas, une valeur V constante supposerait une hausse des cash Flows d'exploitation futurs qui n'a, en réalité, aucune raison d'être associée à la hausse exogène du taux d'intérêt. Les fluctuations des spreads de crédit ne font qu'y refléter ces variations arbitraires de la prime de risque d'exploitation dans le premier cas, ou les variations difficilement concevables des cash flows dans le deuxième cas.

Une approche directe par les cash flows met au jour l'incidence d'une hausse exogène du taux d'intérêt r sur le niveau de V, son drift et le taux de distribution δ. Au final il en résulte un élargissement des spreads de risque[41].

Il apparaît ainsi que les « modèles structurels » de référence, contrairement à ce qu'énoncent les propos optimistes de Longstaff & Schwartz, ne permettent pas réellement d'expliquer les variations observées des spreads de crédit qui tendraient à amortir les fluctuations du taux d'intérêt (Sur leur échantillon Longstaff & Schwartz constatent ainsi qu'un accroissement de 100BP du taux actuariel des obligations du trésor à 30 ans réduit de 62,6 BP les spreads de crédit sur les obligations émises par des entreprises industrielles notées Baa par Moody's. Duffee G (1998) parvient à des conclusions similaires). Gabillon & Germain (2006) montrent que ces variations des spreads pourraient s'expliquer par la politique optimale de défaut suivie par les actionnaires. Mais il est possible, également, que la prime de risque d'exploitation par unité de risque λ soit fonction du taux d'intérêt[42] et que les variations des spreads faisant suite à une variation du taux d'intérêt ne soient que le reflet de cette relation plus fondamentale. Il semble, précisément, que le comportement des spreads de crédit soit la meilleure observation qui plaide en ce sens.

Bibliographie

[41] En supposant une indépendance entre les cash flows et le taux d'intérêt. Si la corrélation était négative elle ne ferait qu'amplifier l'élargissement des spreads. Il faudrait une corrélation très fortement positive entre le taux et les cash flows pour inverser ce résultat. Seuls quelques rares secteurs comme la banque sont susceptibles d'enregister une corrélation positive entre leurs cash flows et le taux d'intérêt.

[42] Les fluctuations de la prime de risque de taux avec le niveau du taux peuvent aussi jouer un rôle.

Black, F. & J, C. Cox, 1976, "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions", Journal of Finance, 31 (2), 351-67.

Chen, N., & S. G. Kou, 2005. "Credit Spreads, Optimal Capital Structure, and Implied Volatility with Endogenous Default and Jump Risk,". Working Paper.

Collin-Dufresne Pierre & Robert S. Goldstein 2001, « Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios?", Journal of Finance, Oct 2001, Vol. 56 Issue 5

Cont Rama, 2004, "Les produits dérivés de crédit". Sous la direction de Richard Bruyère. Ed Economica.

Cox, J. C.& J. E. lngersoll & S. A. Ross, 1985, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica, 53, 385.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr., & S. A. Ross, 1979, "Duration and the Measurement of Basis Risk," Journal of Business 52(1), 51–61.

Das, Sanjiv & Peter Tufano, 1996, "Pricing Credit Sensitive Debt when Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic", Journal of Financial Engineering, 5 (2), June.

Duffee G., 1998, "The Relation Between Treasury Yields and Corporate Bond Yield Spreads", The Journal of Finance, 53 (6), December, 2225-41.

Duffee G., 1999, "Estimating the Price of Default Risk", The Review of Financial Studies, 12 (1), Spring, 197-226.

Duffie, D & K. Singleton, 1999, "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", Review of Financial Studies, Special 1999, 12(4), 687-720.

Duffie, D & D. Lando, 2001, "Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information" , Econometrica 69, 599-632.

Gabillon J.C. & L. Germain, 2006, "Risky Debt Dynamic, Jump and Optimal Financial Policy" Working Paper May 2006.

Geman H.& N. El Karoui & J.C. Rochet, 1995, "Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Pricing Option". Journal of Applied Probability, 32:443-458.

Goldstein, R. & N. Ju & H. Leland, 2001, "An EBIT-based model of dynamic capital structure". Journal of Business, 74, 483-512.

Hilberink, B. & L.C.G. Rogers, 2002, "Optimal capital structure and endogenous default". Finance and Stochastics, 6, 237-263.

Huang J.Z. J. & M. Huang, 2003, "How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk?: A New Calibration Approach", WP May 2003. http://ssrn.com/abstract=307360

Hsu J. C. & J. Saa-Requejo & P. Santa-Clara, 2004, "Bond Pricing with Default Risk" , February 2004. http://ssrn.com/abstract=611401

Ingersoll J. E. & J. Skelton & R. Weil., 1978. "Duration Forty Years Later". Journal of Financial and Quantitative Analysis 13(4), 627–650.

Jarrow, R. & S. Turnbull, 1995. "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk", Journal of Finance, 50 (1), Match, 53-85.

Le Courtois O. & F. Quittard-Pinon, 2006. "Risk-Neutral and Actual Default Probabilities with an Endogenous Bankruptcy Jump-Diffusion Model", WP 28th February 2006.

Leland, H.E., 1994. "Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital sturcture". Journal of Finance, 49, 1213-1252.

Longstaff, F. & E. Schwartz, 1995, "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt", Journal of Finance, 50 (3), July, 789-819.

Longstaff F., 1990, "Pricing Options with Extendible Maturities: Analysis and Applications", Journal of Finance, 45 (3), July, 935-56.

Merton, Robert C., 1974, "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", The Journal of Finance, 29, May, 449-70.

Munk C., 1999, "Stochastic Duration and Fast Coupon Bond option Pricing in Multi-Factor Models", Review of Derivatives Research,3, 157-181.

Shimko D. & N. Tejima & D. Van Deventer, 1993, "The Pricing of Risky Debt When Interes Rates are Stochastic", The Journal of Fixed Income, September, 58-65.

Vasicek O.A.,1977, "An Equilibium Characterisation of the Term Structure" Journal of Financial Economics,5,177-88.

Wei D. G. & D. Guo, 1997, "Pricing Risky Debt: An Empirical Comparison of the Longstaff and Schwartz and Merton Models", The Journal of Fixed Income, September, 9-28.

Xie, Y. A. & L. Sheen & W. Chunchi, 2005. "Duration, Default Risk, and the Term Structure of Interest Rates". The Journal of Financial Research 28 (4), 539-554.

ANNEXES

ANNEXE A: Illustration numérique du modèle à deux facteurs Cash-flow orienté.

Données de base			
Paramètres Vasicek			
a	θ	$\sigma^{'}$	$\lambda^{'}$
0,2	5,00%	4,00%	-10,00%
Paramètres cash flows entreprise			
g	X_0	$\widetilde{\sigma}$	λ
4%	100	40%	15%

MATHEMATICA															
Taux r_t	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	5.50%	6.00%	6.50%	7.00%	7.50%	8.00%
g^Q	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%	-2.000%
terme_duration	-4.967%	-4.573%	-4.181%	-3.791%	-3.403%	-3.017%	-2.633%	-2.251%	-1.871%	-1.492%	-1.116%	-0.742%	-0.370%	0.000%	0.368%
terme_convexité	2.065%	2.057%	2.050%	2.043%	2.035%	2.028%	2.020%	2.013%	2.005%	1.997%	1.990%	1.982%	1.974%	1.966%	1.958%
drift_RN_V	-4.902%	-4.516%	-4.131%	-3.749%	-3.368%	-2.990%	-2.613%	-2.238%	-1.866%	-1.495%	-1.127%	-0.760%	-0.396%	-0.034%	0.326%
$\Delta drift/\Delta r$		0.773	0.769	0.765	0.761	0.757	0.753	0.749	0.745	0.741	0.737	0.733	0.729	0.724	0.720
δ	5.90%	6.02%	6.13%	6.25%	6.37%	6.49%	6.61%	6.74%	6.87%	7.00%	7.13%	7.26%	7.40%	7.53%	7.67%
V	**1 694**	**1 662**	**1 631**	**1 600**	**1 570**	**1 541**	**1 512**	**1 484**	**1 457**	**1 430**	**1 403**	**1 377**	**1 352**	**1 327**	**1 303**
Sensibilité_V	-3.820	-3.811	-3.801	-3.791	-3.781	-3.771	-3.761	-3.751	-3.741	-3.731	-3.721	-3.710	-3.700	-3.689	-3.679
Convexité_V	16.517	16.458	16.400	16.341	16.281	16.221	16.161	16.100	16.039	15.978	15.916	15.854	15.791	15.728	15.665
Vunifactoriel	3333	2857	2500	2222	2000	1818	1667	1538	1429	1333	1250	1176	1111	1053	1000

Le tableau fait apparaître pour différents niveau du taux d'intérêt: Le drift RN et ses différentes composantes(respectivement le taux de croissance RN des cash flows, le terme de duration et le terme de convexité), $\Delta Drift/\Delta r$ qui mesure l'incidence sur le drift de V d'une variation du taux, le taux de distribution δ, la valeur V de l'entreprise, la sensibilité et la convexité de V et, pour finir, la valeur de V qui aurait été obtenue avec un modèle unifactoriel.

ANNEXE B: Spreads et taux d'intérêt dans le modèle à deux facteurs cash-flow orienté.

Il s'agit de démontrer que, dans le modèle cas flow orienté de la section 3, une baisse instantanée du taux d'intérêt réduit les probabilités de défaut corrigées du risque. Raisonnons en premier lieu sous la probabilité $\mathbb{P}$.

Considérons deux valeurs possibles du taux initial: r_0 ou $r_0 + \Delta r_0$ (statique comparative), avec $\Delta r_0 < 0$. Considérons une trajectoire possible de chacun des deux browniens:

$$\{W_t(\omega)\}_{t\in[0,\infty)} \text{ et } \left\{W_t^{'}(\omega)\right\}_{t\in[0,\infty)} ; \omega \in \Omega.$$

A la trajectoire $\{W_t(\omega)\}_{t\in[0,\infty)}$ est associée une trajectoire unique des cash-flows $\{X_t(\omega)\}_{t\in[0,\infty)}$. A la trajectoire $\left\{W_t^{'}(\omega)\right\}_{t\in[0,\infty)}$ sont associées deux trajectoires de taux d'intérêt selon que le taux initial est r_0 ou $r_0 + \Delta r_0$ soit respectivement $\{r_t(\omega)\}_{t\in[0,\infty)}$ et $\{r_t^{\Delta}(\omega)\}_{t\in[0,\infty)}$. On aura ainsi:

$$\left.\begin{array}{l} r_t^{\Delta}(\omega) < r_t(\omega) \\ \\ X_t^{\Delta}(\omega) = X_t(\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow V_t^{\Delta}(\omega) = V\left(X_t^{\Delta}, r_t^{\Delta}\right) > V_t(\omega) = V\left(X_t, r_t\right) \quad \forall t \in [0,\infty)$$

En conséquence si $\tau(\omega)$ et $\tau^{\Delta}(\omega)$ sont les temps de défaut (temps de premier passage de la valeur au seuil $K < V_0$) on aura forcément:

$$\tau^{\Delta}(\omega) > \tau(\omega) \quad ; \omega \in \Omega$$

pour tout couple de trajectoires $\left(\{W_t(\omega)\}_{t\in[0,\infty)}, \left\{W_t^{'}(\omega)\right\}_{t\in[0,\infty)}\right)$.

On aura donc en $t = 0$:

$$\Pr ob_0 \left(\widetilde{\tau}^{\Delta} < t \Big|_{\tau^{\Delta} > 0} \right) < \Pr ob_0 \left(\widetilde{\tau} < t|_{\tau > 0} \right) \quad \forall t > 0$$

Au taux d'intérêt le plus faible sont associées les plus faibles probabilité de défaut. Autrement dit, sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ on a $\Pr ob_0 \left(\widetilde{\tau}^{\Delta} < \tau \right) = 0$. Cette propriété est aussi vérifiée sous la mesure équivalente $\mathbb{Q}^T$ de sorte que:

$$\Pr ob_0^{Q_T} \left(\widetilde{\tau}^{\Delta} < t \Big|_{\tau^{\Delta} > 0} \right) < \Pr ob_0^{Q_T} \left(\widetilde{\tau} < t|_{\tau > 0} \right) \quad \forall t > 0; t \leq T$$